

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES - 1 -

Jean Paul TRUC
Professeur de Mathématiques Spéciales
à l'Ecole des Pupilles de l'AIR
38332 Saint-Ismier Cedex

9 avril 2005

Ce chapitre traite des fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} .

1 Continuité des fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}

1.1 L'espace vectoriel normé \mathbb{R}^n

Nous rappelons ici quelques notions de base sur les notions de limite et continuité. L'espace \mathbb{R}^n est muni d'une norme ; comme \mathbb{R}^n est un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes ; on choisit par exemple l'une des normes usuelles définies par :

Définition 1 Les trois normes usuelles sont définies par : $\forall x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_{\infty} = \sup_{i=1 \text{ à } n} |x_i|$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1 \text{ à } n} |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1 \text{ à } n} x_i^2}$$

La norme $\|x\|_2$ est en fait la norme associée au produit scalaire :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

L'espace d'arrivée qui n'est autre ici que le corps des réels \mathbb{R} est muni de la valeur absolue ; on se trouve dans un cas particulier d'une application d'un espace vectoriel normé dans un autre.

Définition 2 Soit f une application d'une partie D de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} et a un point adhérent à D . La fonction f admet pour limite le réel l quand x tend vers a (en appartenant à D) si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in D : \|x - a\| < \alpha \implies |f(x) - l| < \epsilon$$

ou encore : pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que l'image par f de $B_o(a, \alpha) \cap D$ soit incluse dans $]l - \epsilon, l + \epsilon[$. On note :

$$l = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{x \in D} f(x)$$

ou plus simplement :

$$l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Avec cette définition, si a appartient à D , il est facile de voir que la seule limite possible est $f(a)$. On dit dans ce cas que f est continue au point a .

Définition 3

$$f \text{ continue en } a \iff f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Nous allons maintenant étudier quelques exemples en détails.

1.2 Etude d'un premier exemple

On considère la fonction de deux variables définie par :

$$f(x, y) = \frac{\ln(1 + xy^2)}{x^2 + y^2}$$

Nous vous proposons d'étudier le comportement de cette fonction au voisinage de l'origine sous forme d'exercice :

- Déterminer le domaine de définition de f .
- Est ce que f est continue en tout point intérieur de son domaine de définition ?
- Déterminer la limite :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1 + xy^2)}{x^2 + y^2}$$

Peut-on prolonger f par continuité en $(0, 0)$?

Voici le tracé de la surface d'équation :

$$z = f(x, y) = \frac{\ln(1 + xy^2)}{x^2 + y^2}$$

au voisinage de l'origine .

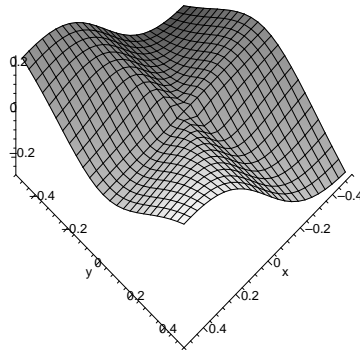


Fig 1

Sur ce tracé , on constate bien qu'il est possible de prolonger par continuité la fonction en posant : $f(0,0) = 0$. Nous profiterons de cette introduction pour introduire ici la notion de surface :

Définition 4 L'espace \mathbb{R}^3 est rapporté à un repère $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Etant donnée une application f d'une partie D de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , nous appellerons surface d'équation $z = f(x,y)$ l'ensemble S formé des points M dont les coordonnées x, y, z vérifient $(x,y) \in D$ et $z = f(x,y)$.

1.3 Un autre exemple

Déterminer si elle existe , la limite :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1+xy)}{x^2+y^2}$$

Cette fois cette limite n'existe pas . Voici le tracé de la surface d'équation :

$$z = g(x,y) = \frac{\ln(1+xy)}{x^2+y^2}$$

au voisinage de l'origine .

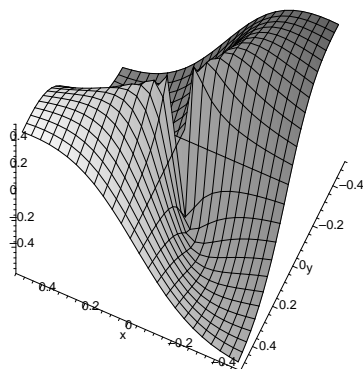


Fig. 2

La discontinuité est visible à l'origine par un "trou" dans le tracé .

2 Dérivées partielles

Nous considérons ici une fonction f définie sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^n et un point $a \in \Omega$.

2.1 dérivée partielle en un point

Définition 5 La dérivée partielle de f au point $a = (a_1, \dots, a_n)$ par rapport à la i -ème variable est définie , si elle existe , par la limite du taux d'accroissement :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + t, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{t}$$

Remarque

Dans le cas d'une fonction de deux variables , on a par exemple :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2)}{t}$$

Définition équivalente 6 La dérivée partielle de f au point $a = (a_1, \dots, a_n)$ par rapport à la i -ème variable est définie , si elle existe , comme la dérivée en zéro de la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} :
 $t \rightarrow f(a + t\vec{e}_i)$

2.2 Applications de classe C^1

Définition 7 Si la dérivée partielle de f par rapport à la i -ème variable existe en tout point de Ω , on définit l'application dérivée partielle :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : x \in \Omega \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

Définition 8 Si pour tout $i \in [1, n]$ les dérivées partielles de f

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

sont définies et continues en tout point de Ω , on dira que f est de classe C^1 sur l'ouvert Ω .

2.3 Notations de Monge

Les notations :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f'_{x_i}$$

sont attribuées à Gaspard Monge (1746-1818). D'abord professeur à l'école du génie militaire de Mézières, il y invente la géométrie descriptive pour le tracé des ouvrages de défense; il travaille sur de nombreux sujets, notamment les équations aux dérivées partielles, de 1772 à 1780. Elu à l'académie des sciences, il est nommé en 1783 examinateur des élèves de la Marine, où il succède à Bezout. Il participe à la création de l'école polytechnique, accompagne Bonaparte en Egypte, puis reprend son poste de professeur à l'X, d'où il sera licencié après la chute de l'Empire. Il est aussi courant de noter, en mécanique par exemple :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = f_{x_i x_i}$$

2.4 Calcul pratique

Dans la pratique on dérive par rapport à une variable, en considérant les autres comme constantes; on écrira par exemple :

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 - 2xy) = 2(x - y)$$

Les règles de calcul sont les mêmes que pour les dérivées des fonctions d'une variable; par exemple, pour un produit :

$$\frac{\partial fg}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}g + f \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

et la dérivation partielle est linéaire :

$$\frac{\partial(\alpha f + g)}{\partial x_i} = \alpha \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

Exemples

a) Si $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, alors

$$r'_x = \frac{x}{r} \quad r'_y = \frac{y}{r}$$

b) Si $\theta = \arctan \frac{y}{x}$, alors

$$\theta'_x = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

2.5 Algèbre des fonctions de classe C^1

De ces règles de calcul, il résulte facilement le résultat suivant :

proposition 1 *Les fonctions de classe C^1 sur l'ouvert Ω et à valeurs dans \mathbb{R} forment une algèbre pour les lois suivantes :*

- *Addition des fonctions.*
- *Multiplication d'une fonction par un scalaire.*
- *Produit de deux fonctions*

Toutefois pour calculer la dérivée partielle d'une fonction prolongée en un point, il est indispensable de recourir à la définition , c'est à dire à la limite du taux d'accroissement.

2.6 Calcul des dérivées partielles en un point de prolongement - Un exemple

Pour $(x, y) \neq (0, 0)$ et $|xy| < 1$ on pose :

$$z = g(x, y) = \frac{\ln(1 + xy)}{x^2 + y^2}$$

et $g(0, 0) = 0$. Calculer les dérivées partielles de g en $(0, 0)$. On constate que cette fonction admet bien des dérivées partielles à l'origine et pourtant g n'est pas continue en ce point .

Remarque

Pour une fonction de plusieurs variables, l'existence des dérivées partielles en un point n'entraîne pas la continuité , alors que pour une fonction d'une variable la dérivabilité entraîne la continuité . En effet il suffit d'une direction pour parcourir la droite réelle , mais deux directions ne permettent pas de juger du comportement d'une fonction dans un plan !

2.7 Dérivée selon un vecteur

D'un point de vue physique, cette dérivée représente la variation de la quantité $f(x)$ quand on se déplace dans une certaine direction avec une certaine vitesse ; elle est définie ainsi :

Définition 9 *Nous considérons ici une fonction f définie sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^n , un point $a \in \Omega$ et un vecteur non nul \vec{u} . La dérivée f au point $a = (a_1, \dots, a_n)$ selon le vecteur \vec{u} est définie , si elle existe , par la limite du taux d'accroissement :*

$$D_{\vec{u}}f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t\vec{u}) - f(a)}{t}$$

Remarque

Si \vec{e}_i est le i -ème vecteur de la base canonique, on a :

$$D_{\vec{e}_i} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

3 Différentiabilité des fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}

3.1 Différentielle de f en a

Définition 10 Nous considérons toujours une fonction f définie sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^n , un point $a \in \Omega$. On suppose que f admet des dérivées partielles par rapport à chaque variable au point a . On appelle différentielle de f en a et on note df_a l'application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} définie par :

$$df_a : h = (h_1, \dots, h_n) \rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$$

3.2 Remarques

- La différentielle de f en a est donc une forme linéaire sur l'espace \mathbb{R}^n , c'est à dire une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} ; L'ensemble de ces formes linéaires s'appelle l'espace dual de \mathbb{R}^n .
- Le calcul de la différentielle est linéaire, c'est à dire que si f et g sont deux applications admettant des dérivées partielles en a et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

$$d(\lambda f + g)_a = \lambda df_a + dg_a$$

3.3 Ecriture de la différentielle

Pour tout indice i , $1 \leq i$ nous notons dx_i la forme linéaire définie par ;

$$dx_i : x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow x_i$$

Ces formes constituent une base $B^* = \{dx_1, \dots, dx_n\}$ du dual de \mathbb{R}^n ; la différentielle de f s'écrit dans cette base :

$$df_a = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i$$

En effet pour tout vecteur $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ on aura :

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i \right)(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i = df_a(h)$$

Exemple

Si f est une forme linéaire sur \mathbb{R}^n , alors en tout point a on a : $df_a = f$. En effet la forme linéaire f est définie par une expression du type :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

où les a_i sont des constantes réelles qui caractérisent f . Les dérivées partielles sont donc constantes : $\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_i$ et on a : $df_a = \sum_{i=1}^n a_i dx_i = f$.

3.4 Différentiabilité de f en a

Définition 11 Nous considérons toujours une fonction f définie sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^n , un point $a \in \Omega$. On suppose que f admet des dérivées partielles par rapport à chaque variable au point a . On dira que f est différentiable en a si et seulement si pour tout accroissement vectoriel $\vec{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ assez petit, on peut écrire un développement limité au premier ordre de la forme :

$$f(a + \vec{h}) = f(a) + df_a(\vec{h}) + o(\|\vec{h}\|)$$

soit encore :

$$f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) = f(a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i + o(\|\vec{h}\|)$$

Remarque

La notation $\|\vec{h}\|$ désigne ici la norme du vecteur pour une norme choisie dans \mathbb{R}^n (toutes les normes sont ici équivalentes).

Exemple

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

f est différentiable en tout point (a, b) de \mathbb{R}^2 , en effet :

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + 2ah + 2bk + (h^2 + k^2)$$

et si on choisit la norme euclidienne, il est clair que, en notant $u = (h, k)$, on a bien : $h^2 + k^2 = \|u\|^2 = o(\|u\|)$.

Proposition 2 Une fonction différentiable en a est continue en a .

en effet on a alors :

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} f(a + \vec{h}) = \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} f(a) + df_a(\vec{h}) + o(\|\vec{h}\|) = f(a)$$

puisque la différentielle df_a , linéaire, est donc continue. On retiendra donc que ce n'est pas l'existence des dérivées partielles mais bien la différentiabilité qui entraîne la continuité.

3.5 Cas des fonctions de classe C^1

Théorème 1 Si f est de classe C^1 sur l'ouvert Ω , alors f est différentiable en tout point $a \in \Omega$.

démonstration

Elle consiste à passer de $a + h$ à a par des déplacements successifs parallèles aux axes de coordonnées et affectant une seule variable à chaque fois. On note : $h = (h_1, \dots, h_n)$ et $v_n = h$; pour tout entier $1 \leq j < n$,

$$v_j = (h_1, \dots, h_j, 0, \dots, 0)$$

et $v_0 = \vec{0}$. On calcule :

$$f(a + h) - f(a) = f(a + v_n) - f(a) = \sum_{j=1}^n f(a + v_j) - f(a + v_{j-1})$$

$$f(a + h) - f(a) = \sum_{j=1}^n [f(a + v_{j-1} + te_j)]_0^{h_j}$$

en notant $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ le j -ième vecteur de base canonique. Nous pouvons écrire les variations $[f(a + v_{j-1} + te_j)]_0^{h_j}$ sous forme intégrale; en effet, la dérivée au point t de la fonction

$$t \longrightarrow f(a + v_{j-1} + te_j)$$

se calcule facilement en prenant la limite quand δ tend vers zéro du taux d'accroissement :

$$\tau(\delta) = \frac{f(a + v_{j-1} + (t + \delta)e_j) - f(a + v_{j-1} + te_j)}{\delta}$$

et par définition, cette limite est $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a + v_{j-1} + te_j)$. Nous pouvons donc écrire :

$$f(a + h) - f(a) = \sum_{j=1}^n \int_0^{h_j} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + v_{j-1} + te_j) dt \quad (1)$$

d'autre part on a également

$$df_a(h) = \sum_{j=1}^n \int_0^{h_j} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) dt \quad (2)$$

on fait alors la différence de (1) et (2) :

$$f(a + h) - f(a) - df_a(h) = \sum_{j=1}^n \int_0^{h_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a + v_{j-1} + te_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right) dt \quad (3)$$

La continuité des dérivées partielles permet alors de montrer que ceci est bien un $o(\|h\|)$. Examinons par exemple l'une de ces intégrales et majorons la :

$$\left| \int_0^{h_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a+v_{j-1}+te_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right) dt \right| \leq |h_j| \sup_{[0, h_j]} \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(a+v_{j-1}+te_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right|$$

Prenons par exemple la norme de la plus grande coordonnée :

$\|h\| = \max |h_j|$. Alors

$$\left| \int_0^{h_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a+v_{j-1}+te_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right) dt \right| \leq \|h\| \sup_{y \in B(a, \|h\|)} \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(y) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right|$$

et la borne supérieure ci dessus tend vers zéro avec $\|h\|$ du fait de la continuité de la dérivée partielle. Chaque intégrale est bien un $o(\|h\|)$ et donc il en est de même de leur somme. \square .

Remarque

De cette démonstration on peut retenir le fait que si f est de classe C^1 sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, contenant le rectangle $[a, b] \times [c, d]$ alors $\forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d]$:

$$f(b, y) - f(a, y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, y) dt$$

$$f(x, c) - f(x, d) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) dt$$

formules qui remplacent la relation $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt$ bien connue pour les fonctions d'une variable.

3.6 Dérivée d'une fonction composée

Théorème 2 On se donne n fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} :

$$x_i \quad t \rightarrow x_i(t)$$

de classe C^1 sur l'intervalle I et une fonction f de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} de classe C^1 sur l'ouvert Ω . On suppose que :

$$\forall t \in I : x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \Omega$$

Alors :

$$\phi : t \rightarrow f(x_1(t), \dots, x_n(t))$$

est de classe C^1 sur l'intervalle I et :

$$\forall t \in I : \phi'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t), \dots, x_n(t)) x_i'(t)$$

Pour la démonstration nous calculons : $\phi(t+h) = f(x(t+h))$. Pour tout i on a :

$$x_i(t+h) = x_i(t) + x'_i(t)h + o(h)$$

ce qui en introduisant le vecteur dérivé $x'(t)$ de la fonction vectorielle x s'écrit : $x(t+h) = x(t) + hx'(t) + o(h)$, le $o(h)$ étant cette fois une fonction vectorielle dont les n composantes sont des $o(h)$. Pour plus de commodités, nous l'écrivons $h\overrightarrow{\epsilon(h)}$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \overrightarrow{\epsilon(h)} = \vec{0}$.

$$\phi(t+h) = f(x(t) + hx'(t) + h\overrightarrow{\epsilon(h)}) = f(x(t)) + df_{x(t)}(hx'(t) + h\overrightarrow{\epsilon(h)}) + o(\|hx'(t) + h\overrightarrow{\epsilon(h)}\|)$$

Comme : $\|hx'(t) + h\overrightarrow{\epsilon(h)}\| = |h| \|x'(t) + \overrightarrow{\epsilon(h)}\|$, on voit que $o(\|hx'(t) + h\overrightarrow{\epsilon(h)}\|) = o(h)$. En utilisant la linéarité de la différentielle on obtient alors :

$$\phi(t+h) = \phi(t) + h df_{x(t)}(x'(t)) + h df_{x(t)}(\overrightarrow{\epsilon(h)}) + o(h)$$

Mais la différentielle est une application linéaire continue :

$$\lim_{h \rightarrow 0} df_{x(t)}(\overrightarrow{\epsilon(h)}) = df_{x(t)}(\vec{0}) = 0$$

donc on a bien montré que :

$$\phi(t+h) = \phi(t) + h df_{x(t)}(x'(t)) + o(h)$$

Ceci prouve que ϕ est dérivable au point t et aussi que :

$$\phi'(t) = df_{x(t)}(x'(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t), \dots, x_n(t)) x'_i(t)$$

Exemple

L'espace \mathbb{R}^3 euclidien étant rapporté à un repère orthonormé, déterminer le point de la courbe de représentation paramétrique :

$$x = t \quad y = t^2 \quad z = t^3 \quad t \in [0, 1]$$

le plus éloigné de l'origine O.

Il suffit ici de considérer la fonction :

$$\phi : t \rightarrow \|\overrightarrow{OM}(t)\|$$

dont on calcule la dérivée par rapport à t :

$$\phi'(t) = \frac{t + 2t^3 + 3t^5}{\sqrt{t^2 + t^4 + t^6}}$$

La fonction est croissante dont l'extrémité ($t=1$) est le point le plus éloigné

3.7 Applications aux équations différentielles exactes

3.7.1 Etude d'un exemple

Considérons par exemple le problème suivant : On cherche les fonctions dérivables de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant :

$2xy + (1 + x^2)y'(x) = 0$ (e). On remarque facilement que la fonction f définie par $f(x, y) = (1 + x^2)y$ vérifie $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 1 + x^2$, si bien que l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'(x) = 0 \quad (e)$$

ce qui d'après la dérivation des fonctions composées équivaut à $\frac{d}{dx} f(x, y(x)) = 0$ ou encore à $f(x, y(x)) = Cte$. Nous pouvons donc en déduire que les solutions de l'équation sont les fonctions définies par :

$$y(x) = \frac{C}{1 + x^2}$$

3.7.2 Généralisation

Cette méthode de résolution se généralise à toute équation de la forme :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))y'(x) = 0 \quad (e)$$

que l'on appelle souvent équation différentielle exacte. Les courbes intégrales de cette équation admettent pour équation cartésienne :

$$f(x, y) = Cte$$

4 Vecteur gradient

4.1 Gradient de f en a

Dans cette partie, \mathbb{R}^n est muni du produit scalaire usuel

$$\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i$$

Définition 12 Nous considérons toujours une fonction f définie sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^n , un point $a \in \Omega$. On suppose que f admet des dérivées partielles par rapport à chaque variable au point a . On appelle gradient f en a et on note $\overrightarrow{\text{grad}} f(a)$ ou $\overrightarrow{\nabla} f(a)$ le vecteur de \mathbb{R}^n :

$$\overrightarrow{\nabla} f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

Remarque

Dans la base canonique le gradient s'écrit donc :

$$\vec{\nabla} f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \vec{e}_i$$

4.2 Ecriture de la différentielle

L'action de la différentielle sur un vecteur peut s'exprimer comme le produit scalaire :

$$df_a(\vec{h}) = \langle \vec{\nabla} f(a), \vec{h} \rangle$$

On trouve ici une excellente illustration du fait que pour un espace euclidien E , le dual E^* est isomorphe à E , toute forme linéaire correspondant au produit scalaire par un vecteur donné.

4.3 Retrouver une fonction à partir de son gradient

Pour déterminer f connaissant $\vec{\nabla} f = \sum_i A_i \vec{e}_i$ on doit intégrer le système d'équations :

$$\forall i \in [1..n] : \frac{\partial f}{\partial x_i} = A_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Examinons quelques exemples :

- Déterminer la fonction f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} dont le gradient est égal à $y^2 \vec{i} + (2xy - 1) \vec{j}$.
(Réponse : $f(x, y) = xy^2 - y + Cte$.)
- Déterminer la fonction f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} dont le gradient est égal à $y \vec{i} - x \vec{j}$.
(Réponse : le problème n'a pas de solution .)

Cette question sera reprise plus loin d'une manière plus systématique...

5 Dérivées partielles d'ordre supérieur

5.1 Dérivées partielles d'ordre deux

Définition 13 Si l'application $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ admet une dérivée partielle par rapport à la j -ème variable au point a on pose :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(a)$$

5.2 Applications de classe C^2

Définition 14 Si la dérivée partielle de f par rapport aux i -ème et j -èmes variables existe en tout point de Ω , on définit l'application :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} : x \in \Omega \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

On note également :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f''_{x_i x_j}$$

Définition 15 Si pour tout couple d'indices $(i, j) \in [1, n]^2$ les dérivées partielles de la fonction f

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

sont définies et continues en tout point de Ω , on dira que f est de classe C^2 sur l'ouvert Ω .

5.3 Le Théorème de Schwarz et ses conséquences

Les dérivées partielles ne dépendent pas de l'ordre des dérivations effectuées :

Théorème (admis) 3 Si f est de classe C^2 sur Ω alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Pour une démonstration de ce résultat, voir par exemple [2] ou [1].

5.3.1 Généralisation

Ce théorème se généralise aux dérivations partielles d'ordre quelconque. On peut définir par récurrence pour tout n -uplet d'entiers m_1, m_2, \dots, m_n la dérivée partielle : $\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}}(a)$. avec $m = m_1 + \dots + m_n$.

5.4 Application : Reconnaître si un champ de vecteurs est un gradient

5.4.1 Définition d'un champ de vecteurs

Définition 16 On appelle champ de vecteurs \vec{v} défini sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^n une application de Ω dans \mathbb{R}^n .

Relativement à une base de \mathbb{R}^n , par exemple la base canonique $\{e_i\}_{i=1..n}$, le champ de vecteurs au point $M = (x_1, \dots, x_n)$ s'écrit :

$$\vec{v}(M) = \sum_{i=1}^n A_i(x_1, \dots, x_n) \vec{e}_i$$

Les fonctions A_i de Ω dans \mathbb{R}^n sont appelées les coordonnées du champ.

5.4.2 Cas d'une fonction de deux variables

Théorème 4 Soit P et Q deux fonctions de classe C^1 sur l'ouvert simplement connexe Ω de \mathbb{R}^2 , alors le champ de vecteur défini par

$$\forall (x, y) \in \Omega : \vec{v} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$$

est un gradient si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in \Omega : \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

Démonstration

- Il est clair que la condition est nécessaire ; en effet si \vec{v} est le gradient d'une fonction f , alors $P(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}$ et $Q(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$. Comme f est de classe C^2 le théorème de Schwarz donne :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

On remarquera qu'il n'est pas nécessaire que l'ouvert soit simplement connexe (c'est à dire sans trou et d'un seul morceau) pour prouver que la condition est nécessaire.

- Nous démontrerons la réciproque dans le cas particulier où l'ouvert Ω est étoilé par rapport à un point que nous pouvons toujours prendre comme étant l'origine O . Si $M(x, y) \in \Omega$, le segment OM est inclus dans Ω , c'est à dire que $\forall t \in [0, 1]$, $(tx, ty) \in \Omega$. Nous pouvons alors définir une fonction f sur Ω par :

$$\forall (x, y) \in \Omega : f(x, y) = \int_0^1 xP(tx, ty) + yQ(tx, ty) dt$$

Les théorème de dérivation des intégrales à paramètres s'appliquent et nous calculons par exemple que :

$$\forall (x, y) \in \Omega : \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \int_0^1 P(tx, ty) + xt \frac{\partial P}{\partial x}(tx, ty) + yt \frac{\partial Q}{\partial x}(tx, ty) dt$$

Mais : $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, d'où :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \int_0^1 P(tx, ty) + xt \frac{\partial P}{\partial x}(tx, ty) + yt \frac{\partial P}{\partial x}(tx, ty) dt$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \int_0^1 P(tx, ty) dt + \int_0^1 t \frac{\partial P}{\partial t}(tx, ty) dt$$

En calculant la dernière intégrale par une intégration par parties par rapport à t :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \int_0^1 P(tx, ty) dt + [tP(tx, ty)]_0^1 - \int_0^1 P(tx, ty) dt$$

soit après calcul $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = P(x, y)$. On montre de la même façon que $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = Q(x, y)$. \square (Pour le cas général voir par exemple [3]).

Remarque

Nous verrons dans la leçon sur les intégrales multiples et curvilignes que l'hypothèse faite sur l'ouvert Ω est bien nécessaire.

5.4.3 Cas d'une fonction de trois variables

Le résultat précédent se généralise ; pour plus de commodités, nous définirons tout d'abord le rotationnel d'un champ de vecteurs. L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Définition 17 *Etant donné un champ de vecteurs $\vec{v} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ de classe $\vec{v} \in C^1$ défini sur l'ouvert Ω de \mathbb{R}^3 Nous appellerons rotationnel de \vec{v} le champ de vecteurs $\overrightarrow{rot}(\vec{v})$ défini par :*

$$\overrightarrow{rot}(\vec{v}) = \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Remarque

La quantité ci dessus est en fait formellement le produit vectoriel de l'opérateur Nabla : $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ avec le champ :

$$\overrightarrow{rot} \vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$$

On peut alors prouver le résultat suivant :

Théorème 5 *Soit P, Q et R trois fonctions de classe C^1 sur l'ouvert simplement connexe Ω de \mathbb{R}^3 , alors le champ de vecteur défini par*

$$\forall (x, y, z) \in \Omega : \vec{v} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

est un gradient si et seulement si :

$$\forall M(x, y, z) \in \Omega : \overrightarrow{rot}(\vec{v})(M) = \vec{\nabla} \wedge \overrightarrow{v}(M) = \vec{0}$$

On peut facilement montrer que la condition est nécessaire ; en effet si $\vec{v} = \vec{\nabla} f$, alors la première composante de $\overrightarrow{rot}(\vec{v})$ vaut :

$$\frac{\partial f'_z}{\partial y} - \frac{\partial f'_y}{\partial z} = f''_{yz} - f''_{zy} = 0$$

d'après le théorème de Schwartz. Il en est de même pour les deux autres composantes. Pour la réciproque la démonstration est analogue à celle que nous avons donnée pour deux variables dans le cas d'un ouvert étoilé.

6 Equation de Laplace et fonctions harmoniques

6.1 Laplacien

Définition 18 On appelle Laplacien de la fonction f de classe C^2 sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ la fonction Δf définie par :

$$\forall x \in \Omega : \Delta f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$$

En dimension trois par exemple, on a :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Nous nous limiterons dans la suite à des fonctions de deux variables.

6.2 Fonctions harmoniques

Définition 19 La fonction f de classe C^2 sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est dite harmonique si elle vérifie en tout point de Ω l'équation aux dérivées partielles de Laplace :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad (L)$$

6.3 Un exemple de problème avec conditions aux limites

Nous cherchons ici à déterminer une fonction qui soit continue sur le carré $K = [0, 1] \times [0, 1]$ et qui soit harmonique à l'intérieur de K . Nous demanderons en outre que les conditions aux limites suivantes soient vérifiées :

$$\begin{cases} \forall x \in [0, 1] & f(x, 0) = 0 & (1) \\ \forall x \in [0, 1] & f(x, 1) = \sin \pi x & (2) \end{cases}$$

Nous chercherons f sous la forme $f(x, y) = \phi(x)\psi(y)$, les fonctions ϕ et ψ étant supposées dans $C^2([0, 1], \mathbb{R})$. La condition (2) nous donne :

$$\forall x \in [0, 1] : f(x, 1) = \sin \pi x = \phi(x)\psi(1)$$

ce qui à un coefficient multiplicatif près détermine ϕ ; nous prendrons : $\phi(x) = \sin \pi x \forall x \in [0, 1]$. L'équation (L) devient alors :

$$\forall (x, y) \in]0, 1[^2 : \sin(\pi x) [\psi''(y) - \pi^2\psi(y)] = 0$$

On en déduit (prendre par exemple $x = \frac{1}{2}$) que ψ est solution de l'équation différentielle linéaire :

$$\psi''(y) - \pi^2\psi(y) = 0$$

donc de la forme : $\psi(y) = A \cosh \pi y + B \sinh \pi y$. Nous devons avoir à cause de (2) $\psi(1) = 1$ et à cause de (1) $\psi(0) = 0$ ce qui permet de déterminer les constantes A et B : $A = 0$ et $B = \frac{1}{\sinh \pi}$. La fonction f cherchée est définie par :

$$f(x, y) = \frac{\sin \pi x \sinh \pi y}{\sinh \pi}$$

La représentation graphique de f est donnée à la figure 5 :

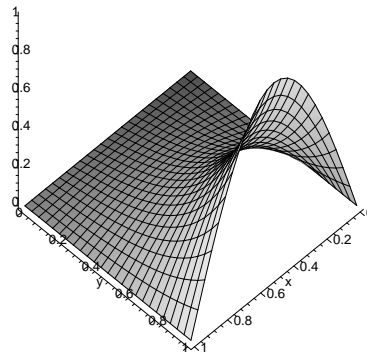


Fig.5

Pour une étude complète des fonctions harmoniques, voir par exemple [?]

7 Extrema des fonctions de plusieurs variables

7.1 Extrema et points critiques

Définition 20 La fonction f définie sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans \mathbb{R} admet un maximum (respectivement : minimum) local au point $a \in \Omega$ s'il existe un voisinage \mathcal{V} de a tel que : $\forall x \in \mathcal{V} : f(x) \leq f(a)$ (respectivement $f(x) \geq f(a)$).

Théorème 6 Si la fonction f de classe C^1 sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans \mathbb{R} admet un extremum au point a , alors :

$$\forall i \in [1..n] : \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$$

Définition 21 Un point $a \in \Omega$ tel que :

$$\forall i \in [1..n] : \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$$

est appelé un point critique de f .

7.2 Point selle

Le théorème 10 nous dit alors que les extrema d'une fonction ne peuvent se produire qu'en un point critique. par contre la réciproque est fausse ; en un point critique, il n'y a pas nécessairement un extremum pour la fonction. Considérons par exemple la fonction de deux variables définie par $f(x, y) = x^2 - y^2$. On vérifie facilement que l'origine $O(0, 0)$ est un point critique, mais ce n'est pas un point où la fonction admet un extremum comme le montre la représentation graphique de f donnée à la figure 6. La surface d'équation $z = x^2 - y^2$ présente une allure de "point selle" ou de "col" au voisinage de l'origine.

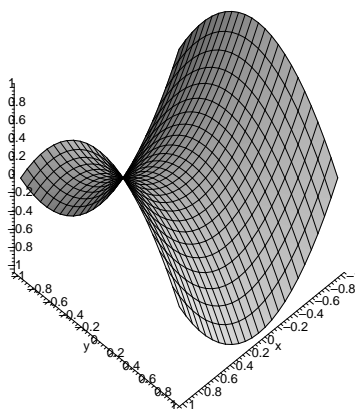


Fig. 6

7.3 Recherche pratique d'un extremum

Nous nous limitons ici au cas d'une fonction de deux variables ; dans la pratique on détermine d'abord le ou les points critiques éventuels puis au voisinage d'un point critique (a, b) on pose : $x = a + h, y = b + k$ et on étudie le signe de la différence :

$$\delta(h, k) = f(a + h, b + k) - f(a, b)$$

pour h et k voisins de zéro.

Exemple

Considérons la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + 4x$$

Les points critiques éventuels sont les solutions du système :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 2y + 4 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2x = 0 \end{cases}$$

Il y a un seul point critique : $(-2, -2)$. On calcule :
 $\delta(h, k) = f(-2+h, -2+k) - f(-2, -2) = 2h^2 + k^2 - 2hk$ et on remarque
que $\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2 : \delta(h, k) = (h - k)^2 + h^2 \geq 0$ On a donc trouvé
un minimum qui est de plus strict car $\delta(h, k) > 0$ si $(h, k) \neq (0, 0)$
. Voici l'allure de la surface d'équation $z = f(x, y)$ au voisinage du
point critique :

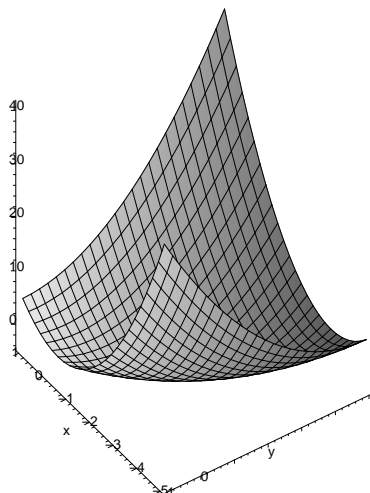


Fig. 7

7.4 La règle “ $rt - s^2$ ” pour une fonction de deux variables

Dans le cas des fonctions de deux variables la règle dite $rt - s^2$ (voir [5] page 922 par exemple) permet d'énoncer des conditions suffisantes pour l'existence d'un extremum.

7.4.1 Formule de Taylor à l'ordre deux

Nous admettrons sans démonstration le résultat suivant (cf. [1])

Théorème 7 Si f est de classe C^2 sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ alors, en tout point (a, b) de Ω on peut écrire pour h et k assez petit, le développement suivant :

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)k^2 \right] + o(h^2 + k^2)$$

7.4.2 Notations r, t, s

En un point critique (a, b) de f , nous noterons :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$$

7.4.3 La règle “ $rt - s^2$ ”

Proposition 3 *Si f est de classe C^2 sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et si (a, b) est un point critique de f , alors :*

- Si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$ f présente un maximum en ce point.
- Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ f présente un minimum en ce point.
- Si $rt - s^2 < 0$ f ne présente pas d'extremum en ce point (point selle)
- Si $rt - s^2 = 0$ on ne peut conclure.

Au voisinage du point critique on a :

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + \frac{1}{2} [rh^2 + 2shk + tk^2] + o(h^2 + k^2)$$

Pour h et k assez petit la différence $\delta(h, k) = f(a + h, b + k) - f(a, b)$ est donc du signe de la forme quadratique $q(h, k) = rh^2 + 2shk + tk^2$. Nous supposons le lecteur familiarisé avec les formes quadratiques. La matrice de cette forme en base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

Cette matrice symétrique réelle admet deux valeurs propres réelles λ et μ et on a :

$$Tr(A) = r + t = \lambda + \mu \quad \det(A) = rt - s^2 = \lambda\mu$$

Supposons par exemple que $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$; les deux valeurs propres sont de même signe. Comme $r < 0$ on a aussi $t < 0$ sinon on aurait $rt - s^2 < 0$. Donc $\lambda + \mu < 0$, ce qui entraîne que les deux valeurs propres sont négatives. La forme quadratique est donc définie négative, c'est à dire que :

$$\forall (h, k) \neq (0, 0) : q(h, k) < 0$$

La différence δ est donc négative au voisinage du point critique; on a un maximum local. On traiterait de même les autres cas.

8 Théorème des accroissements finis

L'inégalité des accroissements finis connue pour les fonctions d'une variable se généralise aux fonctions de plusieurs variables sous la forme suivante :

Théorème 8 Soit D un ouvert convexe de \mathbb{R}^n et f une application de D dans \mathbb{R} de classe C^1 . Alors $\forall (A, B) \in D^2$:

$$|f(B) - f(A)| \leq \| \vec{AB} \| \sup_{z \in AB} \| \vec{\nabla} f(z) \|^2$$

Démonstration

On considère la fonction réelle :

$$\phi : t \in [0, 1] \longrightarrow f(A + t\vec{AB}) \in \mathbb{R}$$

qui est la composée $\phi = f \circ \psi$ de f et de la fonction de classe C^1 :
 $\psi : t \longrightarrow A + t\vec{AB}$. Sa dérivée est donnée par :

$$\phi'(t) = \langle \vec{\nabla} f(\psi(t)), \psi'(t) \rangle = \langle \vec{\nabla} f(A + t\vec{AB}), \vec{AB} \rangle$$

L'inégalité de Cauchy Schwarz nous donne alors :

$$\forall t \in [0, 1] : |\phi'(t)| \leq \| \vec{\nabla} f(A + t\vec{AB}) \| \| \vec{AB} \|^2$$

. L'inégalité des accroissements finis appliqués à ϕ donne :

$$|\phi(1) - \phi(0)| \leq 1. \sup_{t \in [0, 1]} |\phi'(t)|$$

soit encore :

$$|f(B) - f(A)| \leq \| \vec{AB} \|^2 \sup_{t \in [0, 1]} \| \vec{\nabla} f(A + t\vec{AB}) \|^2$$

Corollaire 9 Soit D un ouvert convexe de \mathbb{R}^n et f une application de D dans \mathbb{R} de classe C^1 telle que $\forall z \in \Omega : \vec{\nabla} f(z) = \vec{0}$, alors f est constante .

Références

- [1] Henri Cartan, *Calcul Différentiel*, Hermann.
- [2] Lelong Ferrand - Arnaudiès, *Analyse Tome 2*, Dunod.
- [3] Lelong Ferrand - Arnaudiès, *Intégrales multiples Tome 4*, Dunod.
- [4] John Fritz, *Partial Differential Equations*, Springer-Verlag.
- [5] S.L. Salas, E. Hille, J.T. Anderson, *Calculus*, Wiley International Edition.

9 Exercices - Première série

Exercice 1 (CCP PSI 2004)

Pour tout couple (x, y) de \mathbb{R}^2 différent de $(0, 0)$ on pose :

$$f(x, y) = \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

Montrer que f se prolonge par continuité en $(0, 0)$ et donner la valeur de $f(0, 0)$. Calculer $f'_x(0, 0)$ et $f'_y(0, 0)$.

Exercice 2 (TPE PC 2004)

Soit f la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par :

$$f(x, y) = xy\sqrt{1 - x - y}$$

définie à l'intérieur du triangle :

$$T = \{(x, y) / x \geq 0, y \geq 0, 1 - x - y \geq 0\}$$

Déterminer les extrema de f .

Exercice 3 (CCP PSI 2004)

Soit f la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par :

$$f(x, y) = x^2 + x^2y + y^3$$

Déterminer les extrema de f .

Exercice 4

Soit f la fonction de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} définie par :

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Est ce que f est harmonique sur son domaine de définition ?

Exercice 5

Existe t'il une fonction f telle que le champ de vecteurs \vec{V} défini par :

$$\vec{V}(x, y) = \frac{x^3 + xy^2 + x}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{y - y^3 - yx^2}{x^2 + y^2} \vec{j}$$

soit égal à $\overrightarrow{\text{grad}f}$?

10 Exercices - Deuxième série

exercice 1 - CCP MP 2001

On considère la fonction f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par $f(0,0) = 0$ et sinon

$$f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

Est ce que f est de classe C^1 ?

Exercice 2

Déterminer les dérivées partielles à l'origine de la fonction f définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Exercice 3

Déterminer les extrema de la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7y$$

Exercice 4

Déterminer le polynôme des deux variables x et y le plus général solution de l'équation aux dérivées partielles : $xP'_x + yP'_y = 4P$.

11 Solution des exercices - Première série

Exercice 1 (CCP PSI 2004)

Si nous posons $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, nous avons :

$$f(x, y) = \frac{1 - \cos(r^2)}{r^2} = g(r)$$

Quand (x, y) tend vers $(0, 0)$, r tend vers zéro. Un développement limité de $g(r)$ en zéro nous donne :

$$g(r) = \frac{1 - (1 - \frac{r^4}{2} + o(r^4))}{r^2} = \frac{r^2}{2} + o(r^2)$$

On a donc :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} g(r) = 0$$

et on peut prolonger par continuité en $(0,0)$ en posant $f(0,0) = 0$.
 Nous calculons $f'_x(0,0)$ à l'aide d'un taux d'accroissement :

$$f'_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^3}$$

de nouveau un développement limité conduit à : $f'_x(0,0) = 0$. Par symétrie : $f'_x(0,0) = 0$.

Exercice 2 (TPE PC 2004)

Soit f la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par : Comme $\forall (x,y) \in T$: $f(x,y) = xy\sqrt{1-x-y} \geq 0$ et que la fonction prend la valeur 0 sur les côtés du triangle (i-e pour $x = 0$ ou $y = 0$, ou $x + y = 1$), on peut dire que f est minimale sur le bord de T . On peut chercher un extremum à l'intérieur Ω de T ; f est de classe C^1 sur l'ouvert Ω , de dérivées partielles :

$$f'_x = \frac{y(2-3x-2y)}{2\sqrt{1-x-y}} \quad f'_y = \frac{x(2-3y-2x)}{2\sqrt{1-x-y}}$$

Le système des points critiques $f'_x = f'_y = 0$ est équivalent à :

$$\begin{cases} 2-3y-2x = 0 \\ 2-3y-2x = 0 \end{cases}$$

On en tire facilement $x = \frac{18}{25}$ et $y = \frac{2}{25}$. Comme T est compact et f continue, il existe forcément un point de T où f atteint son maximum, et ce point est nécessairement un point intérieur puisque il est clair que f ne peut être maximale en un point de la frontière. Comme il n'y a qu'un seul point critique à l'intérieur de T , la fonction f admet donc nécessairement son maximum en ce point.

Exercice 3 (CCP PSI 2004)

La fonction f est définie sur \mathbb{R}^2 .

la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par :

$$f(x,y) = x^2 + x^2y + y^3$$

Le système des points critiques $f'_x = f'_y = 0$ s'écrit :

$$\begin{cases} 2x(1+y) = 0 \\ x^2 + 3y^2 = 0 \end{cases}$$

Il y a un seul point critique : $O(0,0)$. Mais comme $f(0,y) = y^3$ change de signe au voisinage de $y = 0$, ce point n'est pas un extremum local pour f .

Exercice 4

La fonction f est définie sur \mathbb{R}^3 privé de l'origine $O(0, 0, 0)$ par :

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Commençons par poser $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; nous calculons facilement :

$$r'_x = -\frac{x}{r^3} \quad r'_y = -\frac{y}{r^3} \quad r'_z = -\frac{z}{r^3}$$

f est harmonique sur son domaine de définition.

Exercice 5

L'équation $\overrightarrow{\text{grad}} f = \overrightarrow{V}$ quivautausystème : $\begin{cases} f'_x = \frac{x^3 + xy^2 + x}{x^2 + y^2} (1) \\ f'_y = \frac{y^3 - yx^2}{x^2 + y^2} (2) \end{cases}$ Remarquonsque :

$f'_x = \frac{x}{x^2 + y^2} + x(1)$ ilestfaciled'intgrercetteequation(1)parrapportx: $f(x, y) =$

$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \frac{x^2}{2} + C(y)$ (3)oCestunefonctiondrivabledelavariablerelley.Drivons(3)parrapport

$C'(y) = -2y$, soit $C(y) = -\frac{y^2}{2} + K$ avec $K \in \mathbb{R}$. La fonction f existe bien et elle est de la forme :

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + K$$

12 Solution des exercices - Deuxième série

Correction de l'exercice 1 - CCP MP 2001

On considère la fonction f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par $f(0, 0) = 0$ et sinon

$$f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

Il est clair que cette fonction admet des dérivées partielles continues en tout point autre que $O(0, 0)$. Commençons par calculer ses dérivées partielles à l'origine :

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0$$

de même $f'_y(0, 0) = 0$. Nous calculons maintenant les dérivées partielles de f en un point $(x, y) \neq (0, 0)$.

$$f'_x = \frac{[y(x^2 - y^2) + 2x^2y](x^2 + y^2 - 2x^2y(x^2 - y^2))}{(x^2 + y^2)^2}$$

soit après simplification :

$$f'_x = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^3}{x^2 + y^2}$$

Pour savoir si cette dérivée partielle tend vers 0 quand (x, y) tend vers $(0, 0)$ nous utilisons les coordonnées polaires r, θ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; on obtient alors :

$$f'_x = \frac{r^3}{r^2} \phi(\theta) + 4 \frac{r^5}{r^4} \psi(\theta) = r(\phi(\theta) + \psi(\theta))$$

où $\phi(\theta)$ et $\psi(\theta)$ sont des fonctions bornées de θ qu'il n'est pas utile de préciser. Sous cette forme on constate que quand (x, y) tend vers $(0, 0)$, r tend vers 0, et par conséquent :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f'_x(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} r(\phi(\theta) + \psi(\theta)) = 0 = f'_x(0, 0)$$

et de même on montrerait, par symétrie de x et y que :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f'_y(x, y) = 0 = f'_y(0, 0)$$

La fonction f est donc de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

Correction de l'exercice 2

On calcule les dérivées partielles de f à l'origine :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - 0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - 0}{t} = 0$$

Correction de l'exercice 3

Le seul point critique est $(1, 4)$. On calcule

$$f(1 + h, 4 + k) - f(1, 4) = 2h^2 + k^2 - kh = (h - \frac{k}{2})^2 + h^2 + \frac{3}{4}k^2$$

Cette forme quadratique est donc définie positive et il y a un minimum .

Correction de l'exercice 4

On écrit P sous la forme :

$$P(x, y) = \sum_p \sum_q a_{p,q} x^p y^q$$

ce qui donne :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \sum_p \sum_q p a_{p,q} x^{p-1} y^q$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \sum_p \sum_q q a_{p,q} x^p y^{q-1}$$

l'équation $xP'_x + yP'_y = 4P$ équivaut à :

$$\forall(x, y) : \sum_p \sum_q (p + q - 4) a_{p,q} x^p y^q = 0$$

On en déduit que P est un polynôme homogène de degré quatre.

$$P(x, y) = \sum_{(p,q) / p+q=4} a_{p,q} x^p y^q$$

2

²©Jean Paul TRUC

Professeur de Mathématiques Spéciales à l'Ecole des Pupilles de l'AIR